

⚠ erreur dans la vidéo du cours : $\log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(|x|^n)$



$f \in C^n(I), x_0 \in I \Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + r_n(x)$$

pas de factorielle.

$$r_n(x) = o(|x-x_0|^n)$$

$$f \in C^\infty(I), x_0 \in I \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + r_n(x)$$

$\exists ? \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ ou

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

NON! $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

si non.

Exemple 8.13 (suite)

(iii) $f(x) = \sin(x)$, x_0 quelconque. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque

Par la formule de Taylor (théorème 8.3)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{r_n(x)}$$

où u_x est entre x et x_0

Or, $f(x) = \sin(x)$, $f^{(n+1)}(x) = \pm \sin(x)$ ou $\pm \cos(x)$

$$\Rightarrow |f^{(n+1)}(u_x)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |r_n(x)| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

d'Alembert.

$$\xrightarrow{\forall x \in \mathbb{R}} 0$$

(or
crit
= D

2 gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

$$\text{i.e. } \forall \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k$$

Définition 8.14 (fonction analytique, séries de Taylor)

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f \in C^\infty(I)$

(i) Pour $x_0 \in I$, on dit que f est analytique en x_0

si $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

La série est appelée la série de Taylor de f autour de x_0 .

(ii) On dit que f est analytique si $\forall x_0 \in I$, f est analytique en x_0 .

Exemple 8.15 (Séries de Taylor de fonctions usuelles, à connaître par ♥)

Les polynômes sont analytiques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$$

Exemple 8.16

(i) Soit $f:]-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{2+x}$ autour de $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2+(x-1)+1} \\ &= \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{3} (3+(x-1))} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{x-1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-1)^k$$

$\hookrightarrow g(x-x_0)$

$\hookrightarrow$ Série de Taylor
autour de 0
connue

$$\cos(x) = \cos(x - \pi + \pi) \\ z = \cos(x - \pi)$$

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k y^k$$

$$\leftarrow y = \frac{x-1}{3}$$

qui est la série
de Taylor de f .

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{2x}$

Calculons la série de Taylor de f autour de $x_0 = 1$.

$$f(x) = e^{2x} = e^{2(x-1+1)} = e^{2(x-1)+2} = e^2 e^{2(x-1)}$$

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}$$

$$y = 2(x-1)$$

$$= e^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k (x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} (x-1+1)^k =$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (x-1)^j =$$

$$\Rightarrow e^{2x}$$

Autre méthode. 1- dériver $f^{(n)}(x) \forall n$,
2- utiliser la formule

$$\begin{aligned} \text{On derive } f^{(n)}(x) &= 2^n e^{2x} \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n e^2}{n!} (x-1)^n. \end{aligned}$$

§8.3 Séries entières

Théorème 8.17

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite, $x_0 \in \mathbb{R}$ et la série avec paramètre

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Alors, il y a 3 possibilités :

(i) La série ne converge que pour $x = x_0$.

(ii) $\exists r > 0$ tq la série converge absolument pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ et diverge pour $x \notin [x_0 - r, x_0 + r]$

(iii) La série converge absolument $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas, l'ensemble

$\bar{I} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ converge}\}$ est un intervalle.

Définition 8.18 (Série entière, rayon de convergence, intervalle de convergence)

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite, $x_0 \in \mathbb{R}$ et la série avec paramètre

$$x : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

La série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$ est la fonction

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

où $I = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ converge}\}$ est l'intervalle de convergence

Si $r > 0$ est tel que

$$I =]x_0 - r, x_0 + r[\text{ ou } [x_0 - r, x_0 + r[\text{ ou }]x_0 - r, x_0 + r] \\ \text{ ou } [x_0 - r, x_0 + r]$$

r est appelé le rayon de convergence de la série
entière

(avec $r = 0$ si $I = [x_0, x_0]$, $r = +\infty$, si $I = \mathbb{R}$)

Remarque 8.19

Pour trouver r , on traite la série comme
une série qui dépend d'un paramètre, et
on résout les conditions pour $|x - x_0|$

Exemple 8.20 (i) soit la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k (x-1)^k$$

rayon de convergence,
Centre de la lmsup:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|2^k (x-1)^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2|x-1| = 2|x-1|$$

$\Rightarrow$ on résout $2|x-1| < 1$ pour $|x-1|$.

$\Rightarrow |x-1| < \boxed{\frac{1}{2}} \rightarrow$ rayon de convergence!

$\Rightarrow$ rayon de convergence $= \frac{1}{2}$.

Intervalli de convergence:

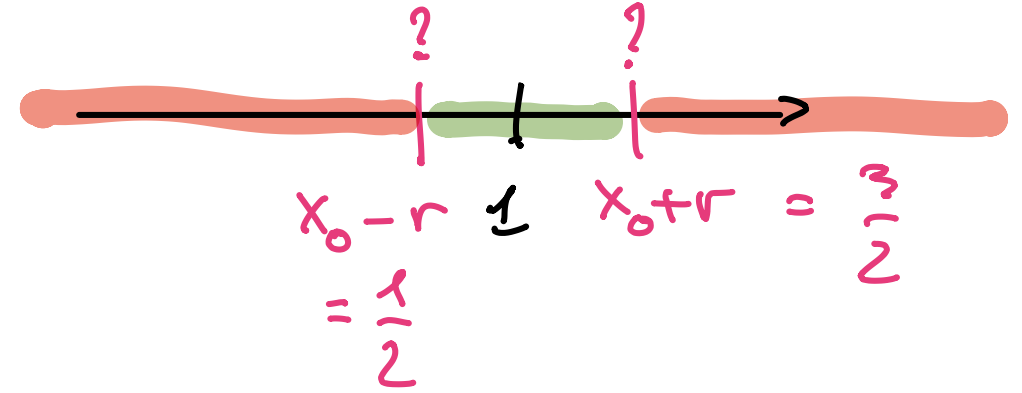
$$\text{Si } x = x_0 - r = \frac{1}{2}$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{1}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \quad \text{diverge}$$

car, $(-1)^k \not\rightarrow 0$

$$\text{Si } x = x_0 + r = \frac{3}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{3}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \quad \text{diverge.}$$

$\Rightarrow$ l'intervalle de convergence est $I =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$



(ii) Soit la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! x^k$$
 rayon de conv:

d'Alembert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(k+1)! x^{k+1}|}{|k! x^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) \cdot x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow r=0$, Intervalle de convergence : $[0,0] = \{0\}$.

(iii)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} (x-14)^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{k+1} (x-14)^{k+1}}{(k+1)!} \right| \cdot \left| \frac{k!}{2^k (x-14)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 |x-14|}{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow r = +\infty, \quad \tilde{I} = \mathbb{R}.$$

(iv)

Formules qu'on peut lire à certains endroits.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k \rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$\text{ou } r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 4^k} (x+2)^{2k}$$

⚠ FAUX

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 4^n}}{\frac{1}{(n+1)^2 \cdot 4^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot 4 = 4$$

Teste: D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 4^{n+1}} |x+2|^{2n+2} \cdot \frac{n^2 4^n}{(x+2)^{2n}} = \frac{1}{4} |x+2|^2$$

$$\frac{1}{4} |x+2|^2 < 1, \quad |x+2|^2 < 4, \quad |x+2| < 2.$$

$$\Rightarrow \text{radius} = 2.$$